Analyse, Classification et Indexation des données (ACID)

Rappels d'algèbre linéaire

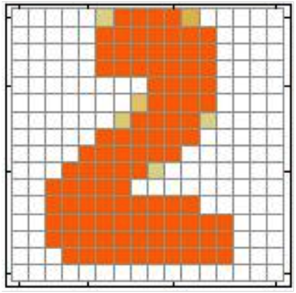
Akka Zemmari

LaBRI, Université de Bordeaux

2021 - 2022

Intuitions

Les vecteurs, les matrices, pourquoi faire ...



Intuitions

Les vecteurs, les matrices, pourquoi faire ...

$$M = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$$

Intuitions

Les vecteurs, les matrices, pourquoi faire ...

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{256}$$

Notions de base

Définitions

Vecteur

$$V = (v_i)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Notions de base

Définitions

Matrice :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Matrices particulières :

- Matrice identité :

$I = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ avec $n = m$, $a_{i,i} = 1$ et $a_{i,j} = 0$, $\forall i \neq j$

- Matrice diagonale :

$D = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ avec $n = m$, $a_{i,i} = d_i$ et $a_{i,j} = 0$, $\forall i \neq j$

Calcul matriciel

Opérations de base

Addition

$$C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & c_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}$$

Calcul matriciel

Opérations de base

Multiplication

- De deux vecteurs, $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

- D'une matrice par un vecteur, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$:

$$Ax = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{j,i} x_i \right)_{1 \leq j \leq m} \in \mathbb{R}^m.$$

- De deux matrices, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times l}$:

$$P = (p_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq l}} = A \times B \in \mathbb{R}^{m \times l}, \text{ avec } p_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Autres opérations

- Transposée : $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{R}^{m,n}$,

$$A^T = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \in \mathbb{R}^{n,m}$$

  Remarque : $(A \times B)^T = B^T \times A^T$.
- Inverse : l'inverse d'une matrice **carrée inversible** A est notée A^{-1}. Il s'agit de l'unique matrice telle que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I.$$

Autres opérations

- Trace : La trace d'une matrice carrée A est la somme de ses entrées en diagonale.

$$tr\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}.$$

Remarque : $tr\left(A^T\right)=tr\left(A\right)$ et $tr\left(A\times B\right)=tr\left(B\times A\right)$.

- Déterminant : $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$,

$$det\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(-1\right)^{i+j}a_{i,j}det\left(A_{\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{i\},\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{j\}}\right)$$

Remarque : A est inversible si, et seulement si, $det\left(A\right)\neq 0$.

Propriétés

Norme

Définition.

Une norme est une fonction

$$N : V \to [0, +\infty[,$$

où V est un espace vectoriel et tel que : $\forall x, y \in V$,
- $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$,
- $N(ax) = |a| N(x)$ pour tout scalaire a,
- $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Propriétés

Norme

Exemples de normes

Pour $x \in \mathbb{R}^n$:

Norme	**Notation**	**Définition**
L^1, Manhattan	$\|x\|_1$	$\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert$
L^2, Euclidean	$\|x\|_2$	$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
L^p, $p-$norme	$\|x\|_p$	$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$
L^∞, Infini	$\|x\|_\infty$	$\max_i \lvert x_i \rvert$

Propriétés

Rang

Dépendance linéaire

les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sont dit dépendants s'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ tels que :
- $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, et
- $\exists i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$.

Sinon, les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sont dit indépendants.

Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice A, noté $rang\,(A)$ est la dimension de l'espace vectoriel généré par ses colonnes. Ceci est équivalent au nombre maximum de colonnes indépendantes de A.

Valeurs propres, vecteurs propres

Définition

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^*$, appelé vecteur propre, tel que :

$$Av = \lambda v.$$

Opérations avancées

Gradient

- $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction,
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice.

Le gradient de f par rapport à A est une matrice de $\mathbb{R}^{m \times n}$, notée $\nabla_A f(A)$, définie par :

$$(\nabla_A f(A))_{i,j} = \frac{\partial f(A)}{\partial a_{i,j}}, \forall (i,j) \in \{1, 2, \cdots, m\} \times \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Opérations avancées

Hessienne

- $f : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ une fonction,
- $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur.

La hessienne de f par rapport à x est une matrice symétrique de $\mathbb{R}^{n \times n}$, notée $\nabla_x^2 f(x)$, définie par :

$$\left(\nabla_x^2 f(x)\right)_{i,j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Vérifiez que vous avez tout compris ...

Prouvez les propriétés suivantes :

- $\nabla_A tr(AB) = B^T$
- $\nabla_{A^T} f(A) = (\nabla_A f(A))^T$
- $\nabla_A tr(ABA^T C) = CAB + C^T AB^T$
- $\nabla_A |A| = |A| \left(A^{-1}\right)^T$.

Et en pratique ...

`numpy` et `numpy.linalg`

Voir la démo sur `jupyter notebook`