Analyse, Classification et Indexation des données (ACID)

Méthodes d'optimisation

Akka Zemmari

LaBRI, Université de Bordeaux

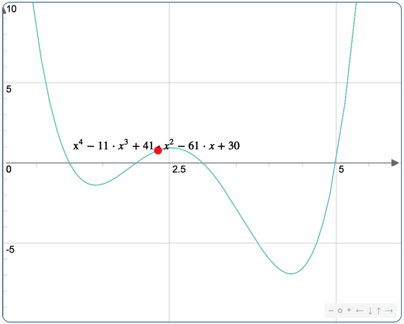
2021 - 2022

Intuition

Soit la fonction :

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5) = x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30.$$

et son graphique sur l'intervalle $[0,6]$:



Intuition

- Question : Trouver x^* tel que

$$f(x^*) = \min_{x \in [0,6]} \{f(x)\}$$

Intuition

- Question : Trouver x^* tel que

$$f(x^*) = \min_{x \in [0,6]} \{f(x)\}$$

Ce que l'on peut formuler par

$$x^* = argmin_{x \in [0,6]} (f(x))$$

Intuition

- Question : Trouver x^* tel que

$$f(x^*) = \min_{x \in [0,6]} \{f(x)\}$$

Ce que l'on peut formuler par

$$x^* = argmin_{x \in [0,6]} (f(x))$$

- (une) réponse : calculer $f'(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 33x^2 + 82x - 61$$

et résoudre $f'(x) = 0$ ... dur dur ...

Intuition

- Question : Trouver x^* tel que

$$f(x^*) = \min_{x \in [0,6]} \{f(x)\}$$

Ce que l'on peut formuler par

$$x^* = argmin_{x \in [0,6]} (f(x))$$

- (une) réponse : calculer $f'(x)$:

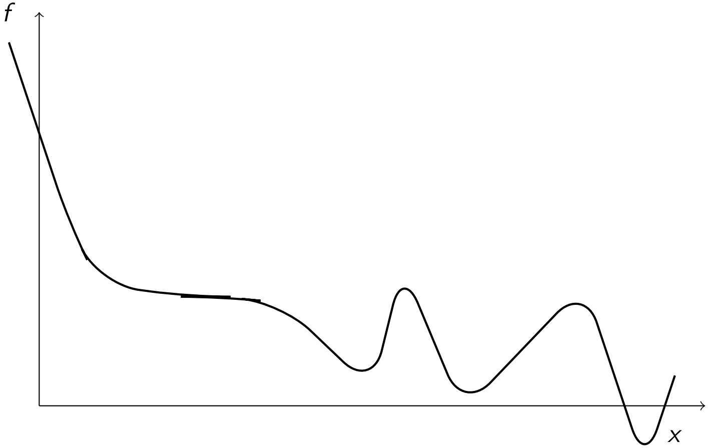
$$f'(x) = 4x^3 - 33x^2 + 82x - 61$$

et résoudre $f'(x) = 0$ ... dur dur ...

- Une solution : Descente du gradient (voir l'explication sur le `notebook`).

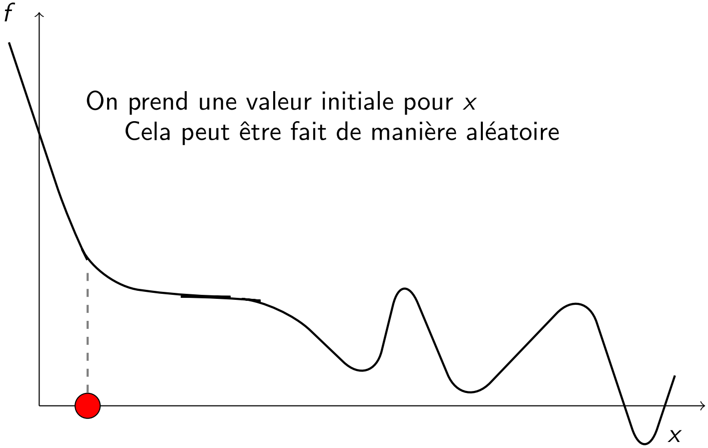
Descente du gradient

Trouver le(s) paramètre(s) x qui minimise(nt) la fonction f.



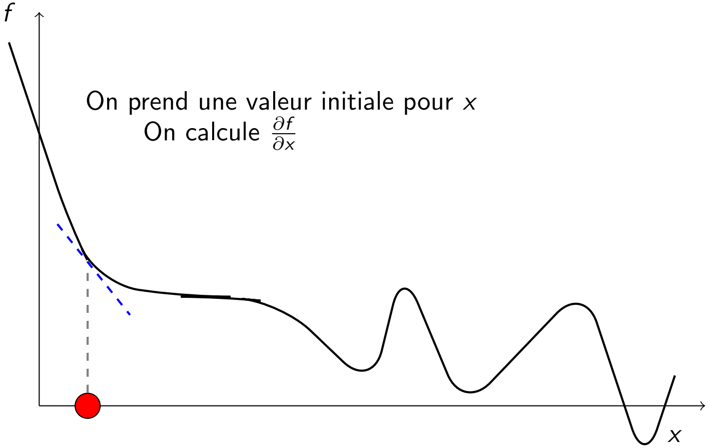
Descente du gradient

Trouver le(s) paramètre(s) x qui minimise(nt) la fonction f.



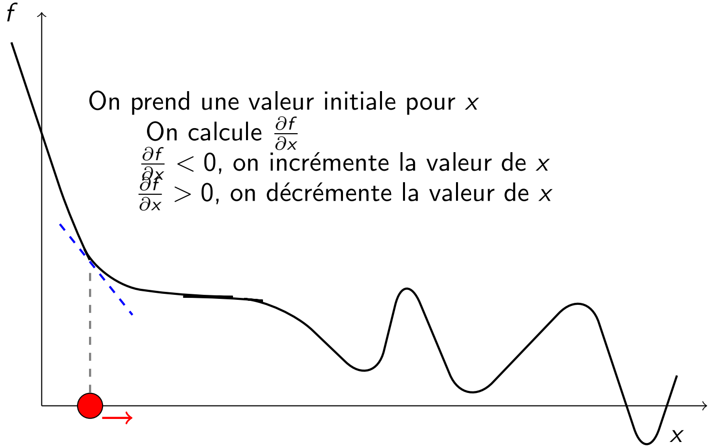
Descente du gradient

Trouver le(s) paramètre(s) x qui minimise(nt) la fonction f.



Descente du gradient

Trouver le(s) paramètre(s) x qui minimise(nt) la fonction f.



On prend une valeur initiale pour x

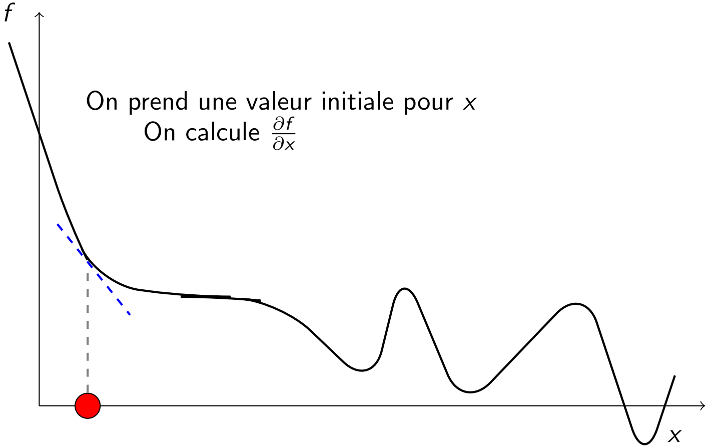
On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\frac{\partial f}{\partial x} < 0$, on incrémente la valeur de x

$\frac{\partial f}{\partial x} > 0$, on décrémente la valeur de x

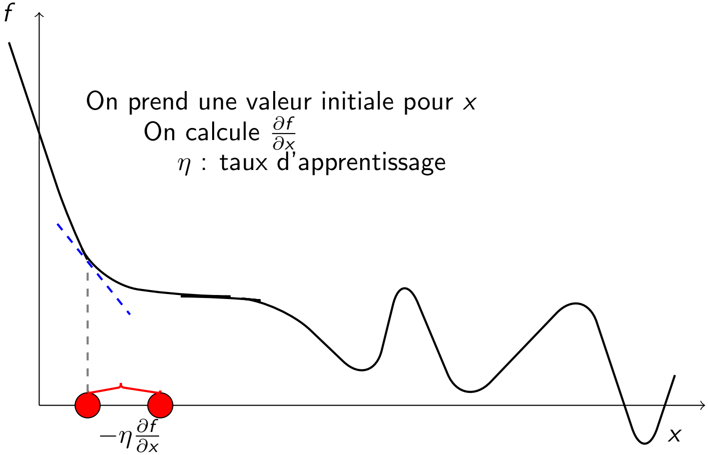
Descente du gradient

Trouver le(s) paramètre(s) x qui minimise(nt) la fonction f.



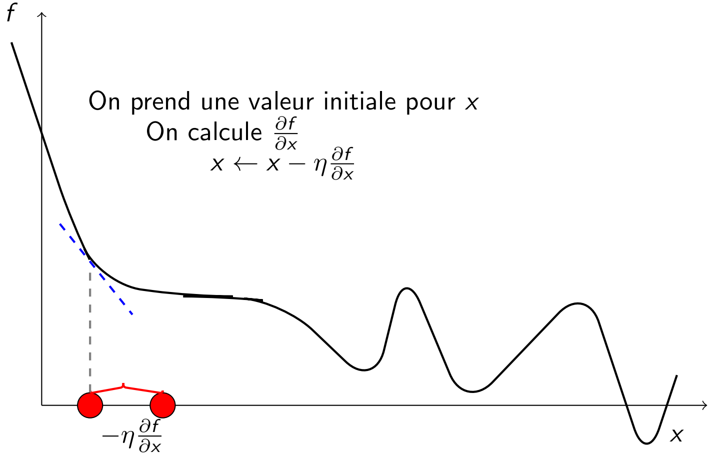
Descente du gradient

Trouver le(s) paramètre(s) x qui minimise(nt) la fonction f.



Descente du gradient

Trouver le(s) paramètre(s) x qui minimise(nt) la fonction f.



Descente du gradient

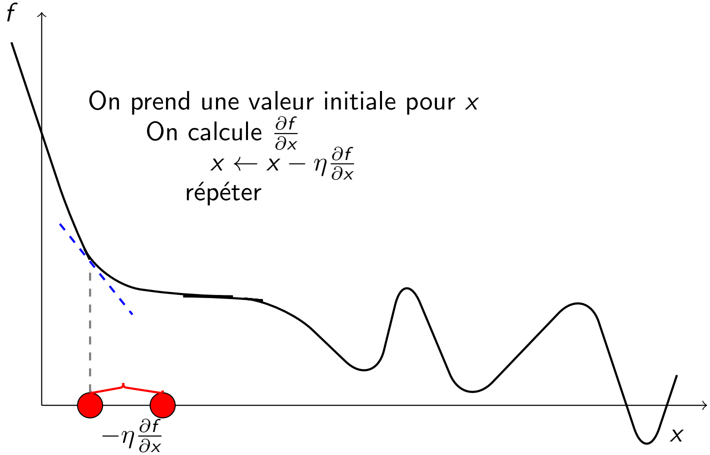
Trouver le(s) paramètre(s) x qui minimise(nt) la fonction f.

On prend une valeur initiale pour x

On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$

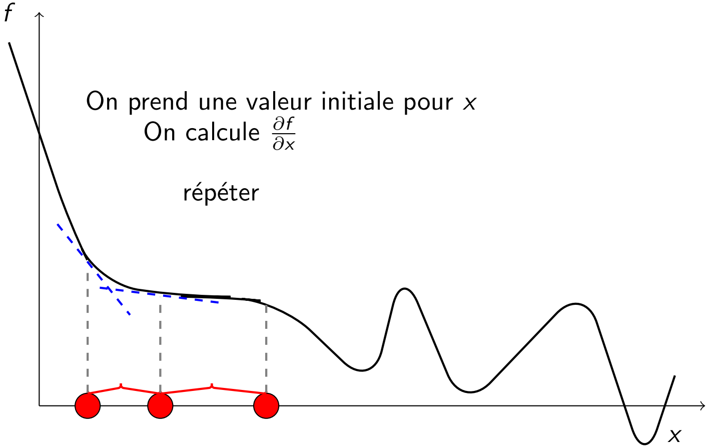
$x \leftarrow x - \eta \frac{\partial f}{\partial x}$

répéter



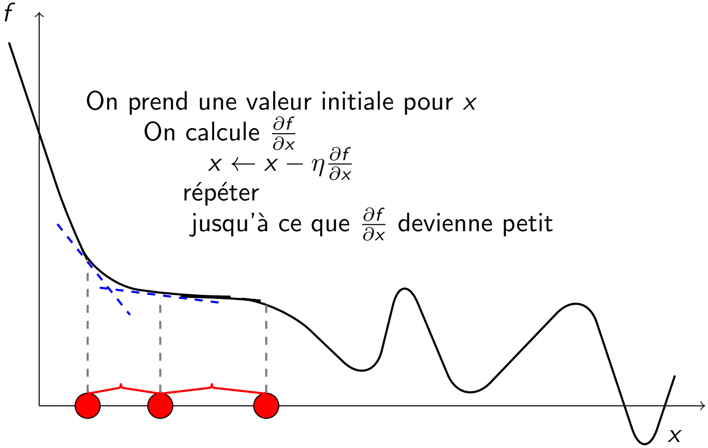
Descente du gradient

Trouver le(s) paramètre(s) x qui minimise(nt) la fonction f.



Descente du gradient

Trouver le(s) paramètre(s) x qui minimise(nt) la fonction f.



Descente du gradient

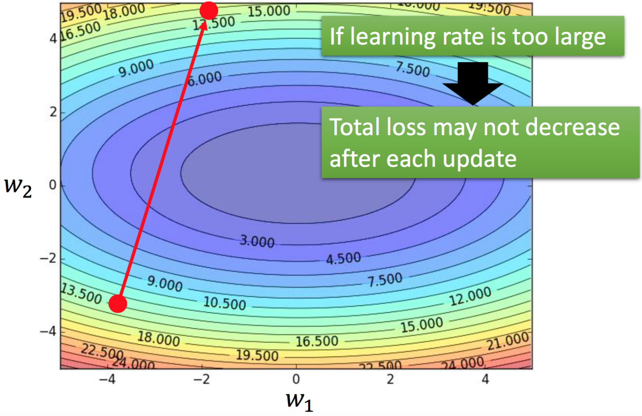
L'algorithme

1. Initialiser avec x_0 (au hasard);
2. Répéter
$$x_{t+1} \leftarrow x_t - \eta \nabla f(x_t);$$
3. Jusqu'à convergence

- au hasard car quasiment impossible de trouver une valeur optimale
- $\nabla f(x_t)$ il s'agit du gradient (voir les rappels, chapitre précédent)
- η est un paramètre qui permet de moduler la correction
- Question : pourquoi le -?
- convergence : Nombre d'itérations fixé, ou différence entre valeurs successives de x_t ou $\nabla f(x_t)$ très petit

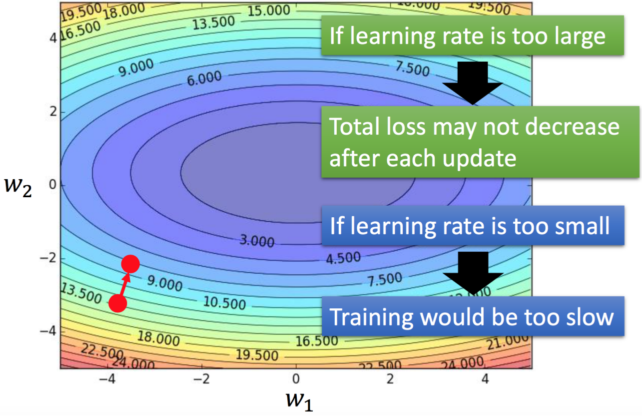
Descente du gradient

de l'importance du choix du taux d'apprentissage η :



Descente du gradient

de l'importance du choix du taux d'apprentissage η :



Descente du gradient

de l'importance du choix du taux d'apprentissage η :

- Un taux trop petit garantit une convergence vers un minimum mais le temps de convergence peut être trop grand ....
- Un taux trop grand peut faire "sauter" le minimum ..

Descente du gradient

de l'importance du choix du taux d'apprentissage η :
Une solution simple : réduire le taux par un facteur toutes les K itérations

- Initialement, on est loin de la destination, on utilise donc un pas assez grand,
- Après quelques itérations, on est proche de la destination, on réduit donc le pas.
- En général, on utilise la mise à jour suivante :

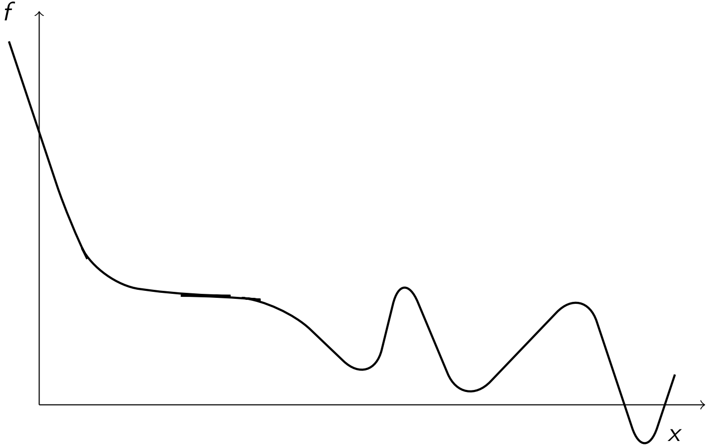
$$\eta^{(t)} = \frac{\eta}{\sqrt{t+1}}$$

Descente du gradient

- La descente du gradient ne garantie pas de trouver un minimum global,

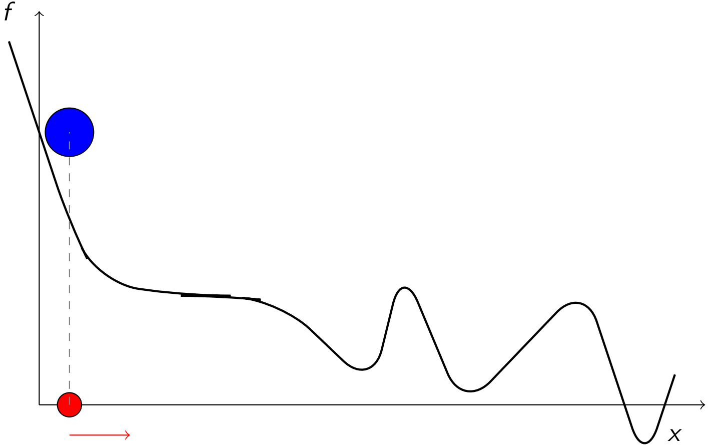
Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



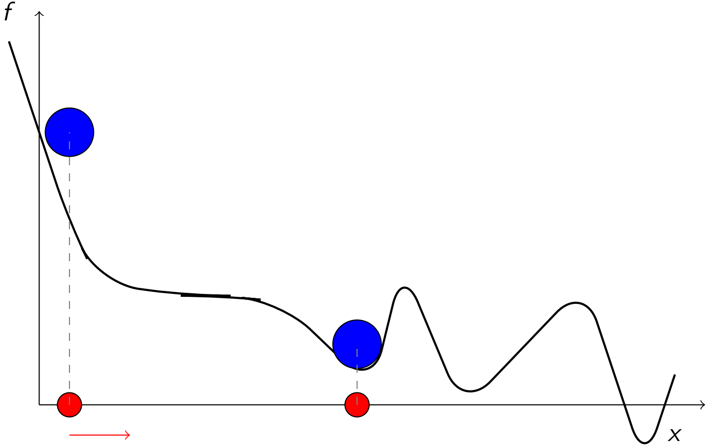
Descente du gradient

Problème : minimum mais local ...



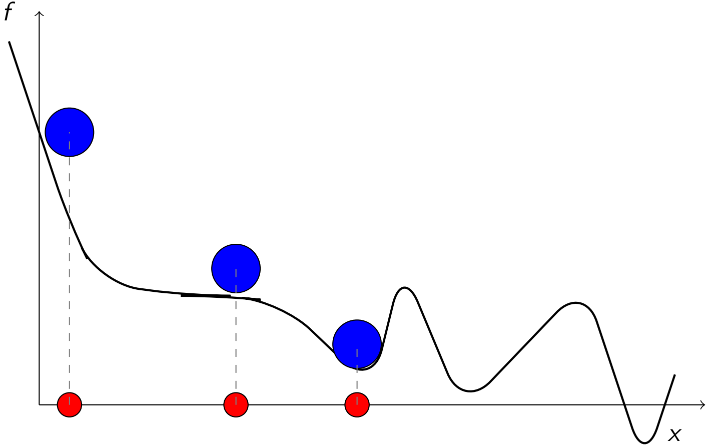
Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



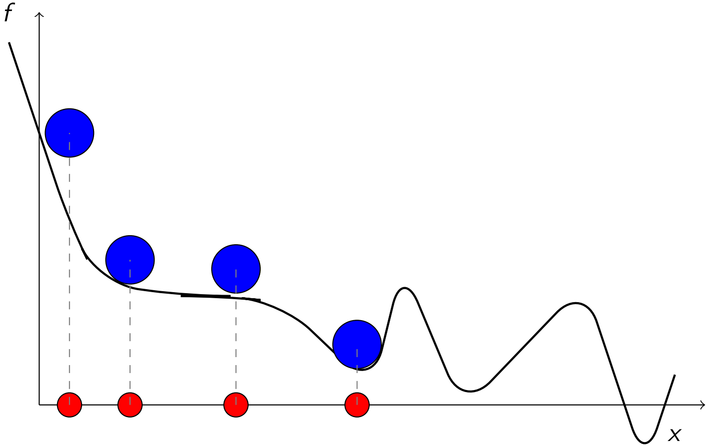
Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



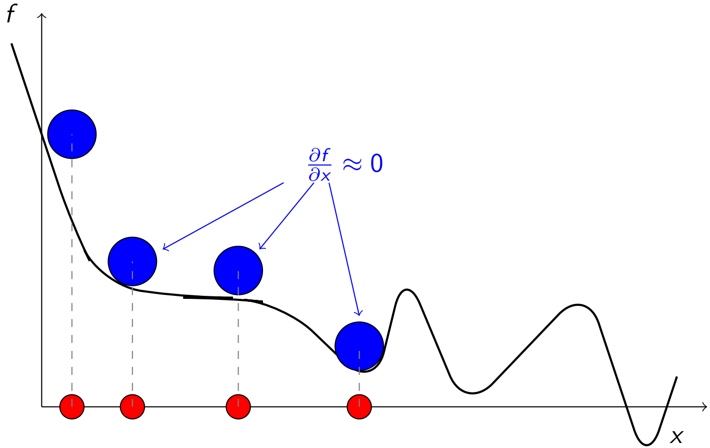
Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....

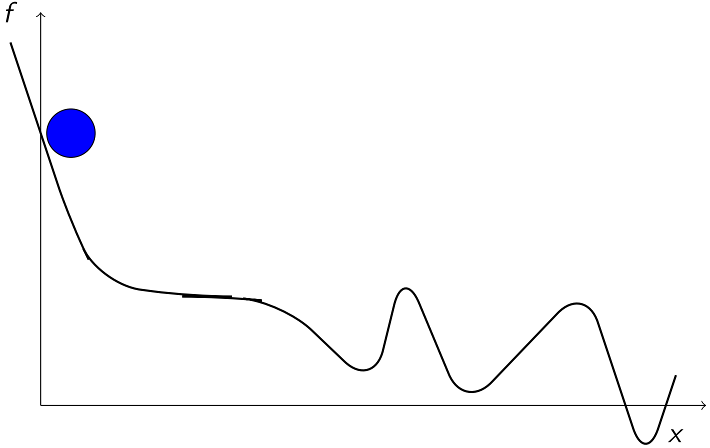


Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....
Idée : s'inspirer de la physique et d'une balle qui dévale une pente

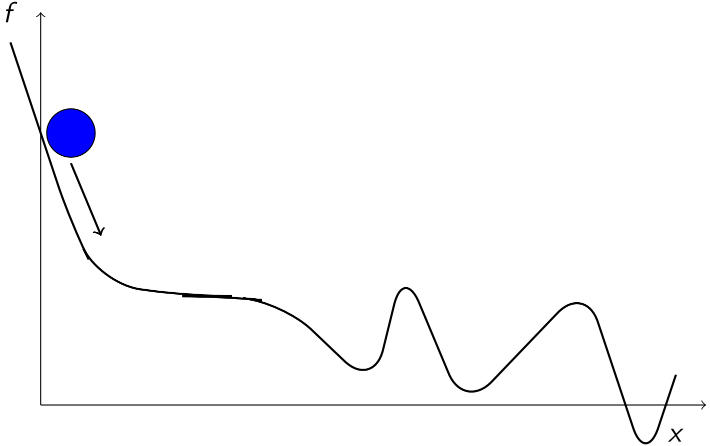
Descente du gradient

Méthode du Momentum :



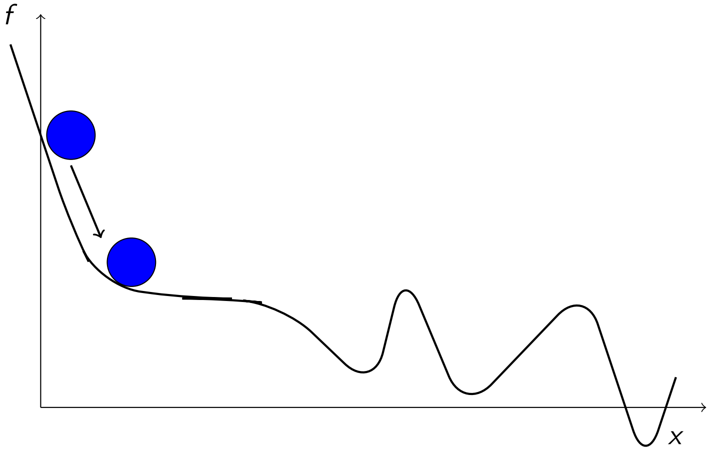
Descente du gradient

Méthode du Momentum :



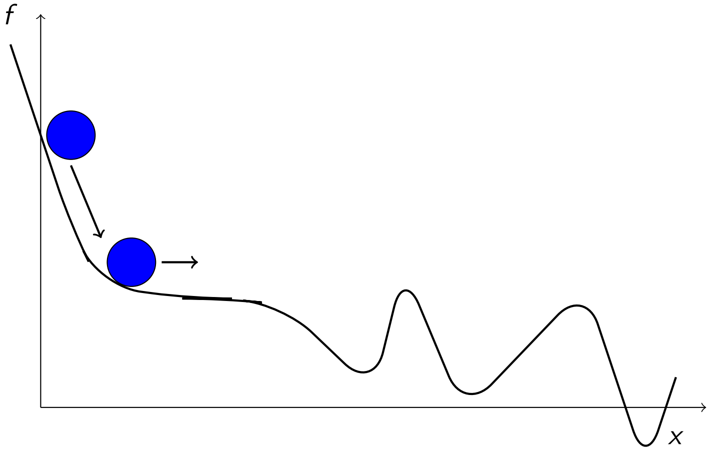
Descente du gradient

Méthode du Momentum :



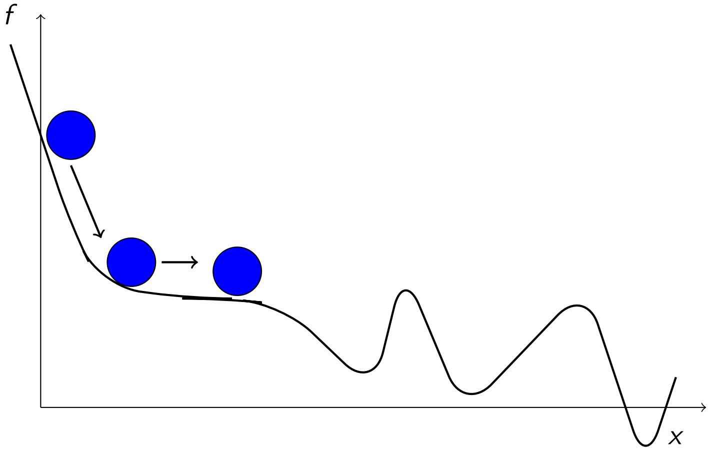
Descente du gradient

Méthode du Momentum :



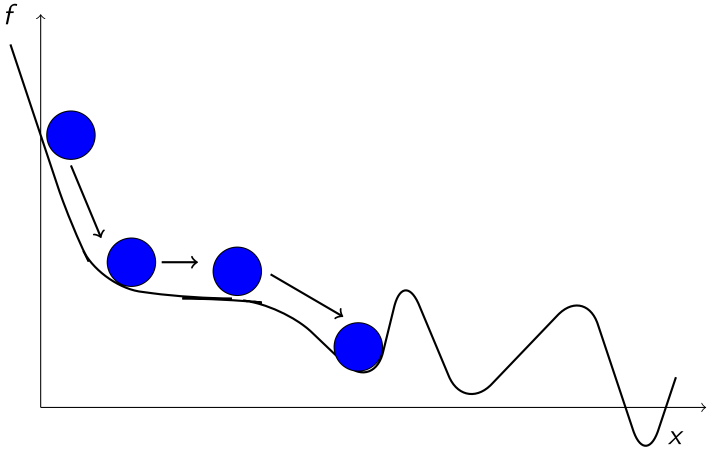
Descente du gradient

Méthode du Momentum :



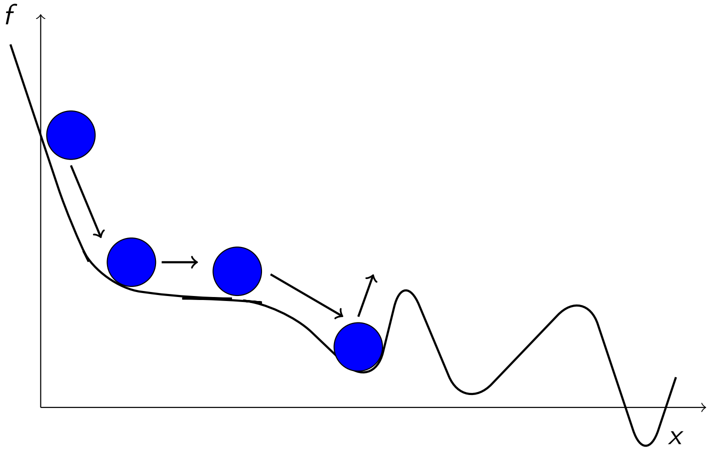
Descente du gradient

Méthode du Momentum :



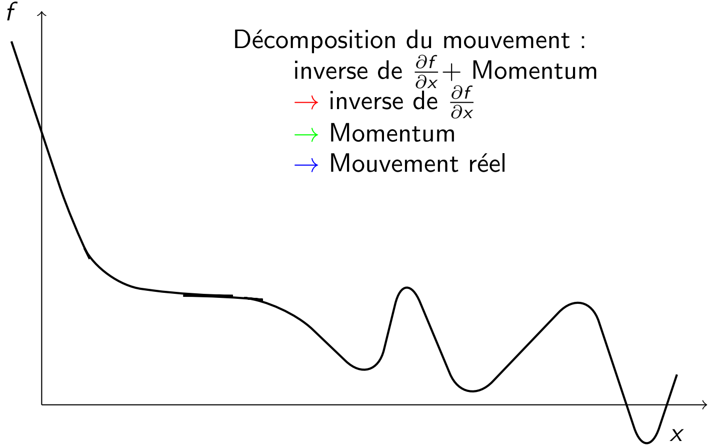
Descente du gradient

Méthode du Momentum :



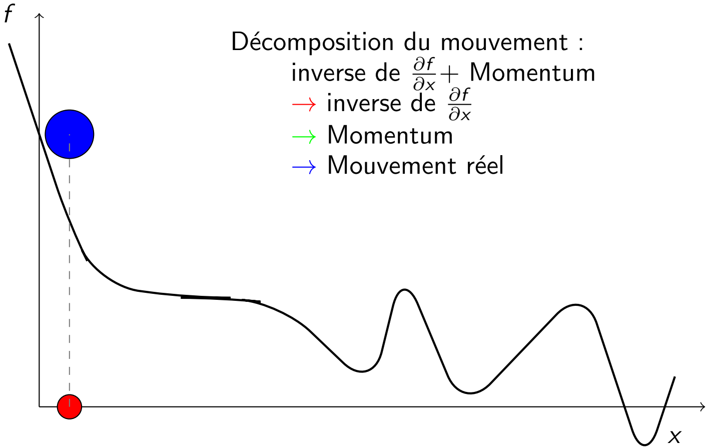
Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



Décomposition du mouvement :

inverse de $\frac{\partial f}{\partial x}$ + Momentum

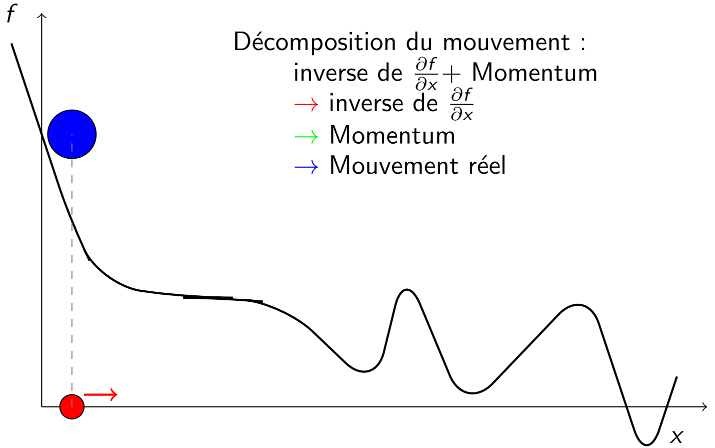
$\rightarrow$ inverse de $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\rightarrow$ Momentum

$\rightarrow$ Mouvement réel

Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



Décomposition du mouvement :

inverse de $\frac{\partial f}{\partial x}$ + Momentum

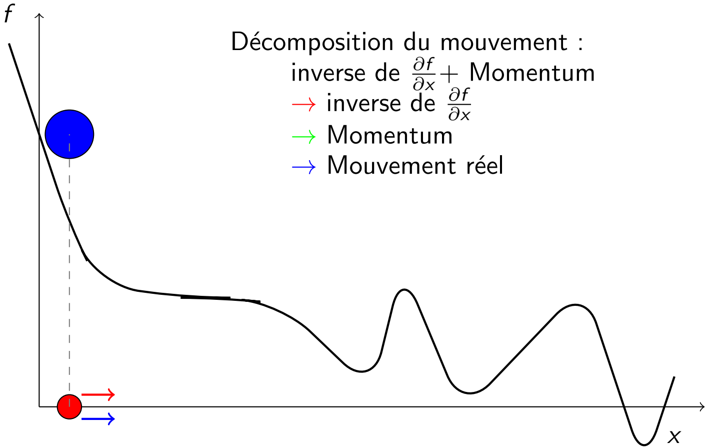
$\rightarrow$ inverse de $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\rightarrow$ Momentum

$\rightarrow$ Mouvement réel

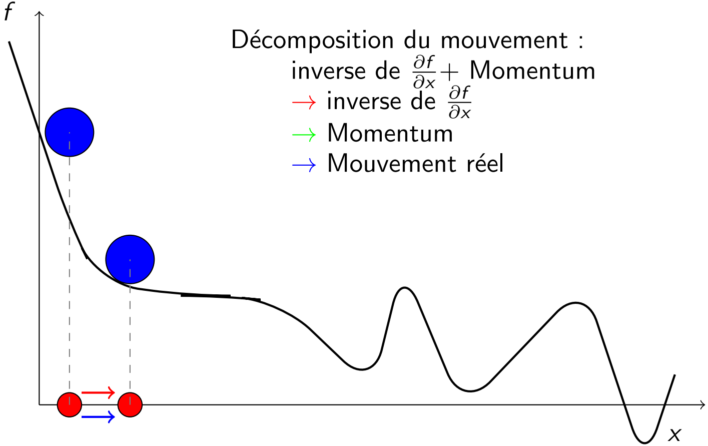
Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



Décomposition du mouvement :

inverse de $\frac{\partial f}{\partial x}$ + Momentum

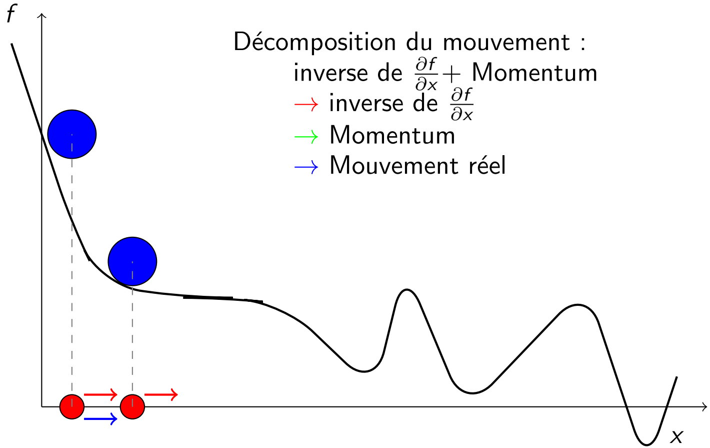
$\color{red}{\rightarrow}$ inverse de $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\color{green}{\rightarrow}$ Momentum

$\color{blue}{\rightarrow}$ Mouvement réel

Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



Décomposition du mouvement :

inverse de $\frac{\partial f}{\partial x}$ + Momentum

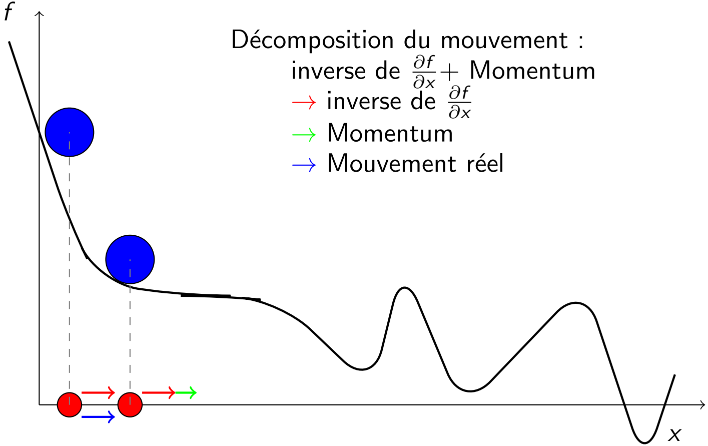
$\rightarrow$ inverse de $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\rightarrow$ Momentum

$\rightarrow$ Mouvement réel

Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



Décomposition du mouvement :

inverse de $\frac{\partial f}{\partial x}$ + Momentum

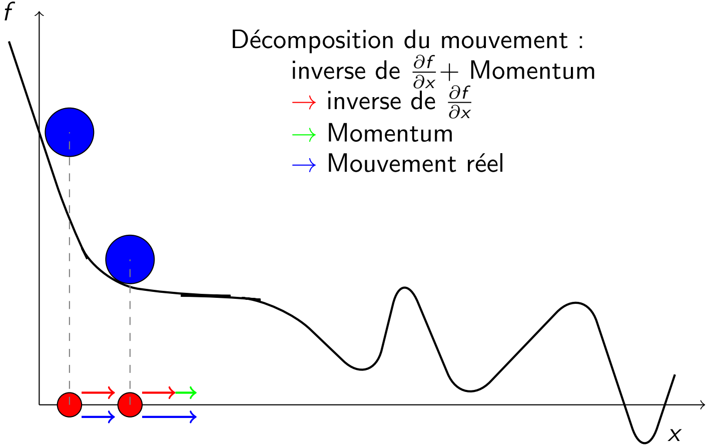
$\rightarrow$ inverse de $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\rightarrow$ Momentum

$\rightarrow$ Mouvement réel

Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



Décomposition du mouvement :

inverse de $\frac{\partial f}{\partial x}$ + Momentum

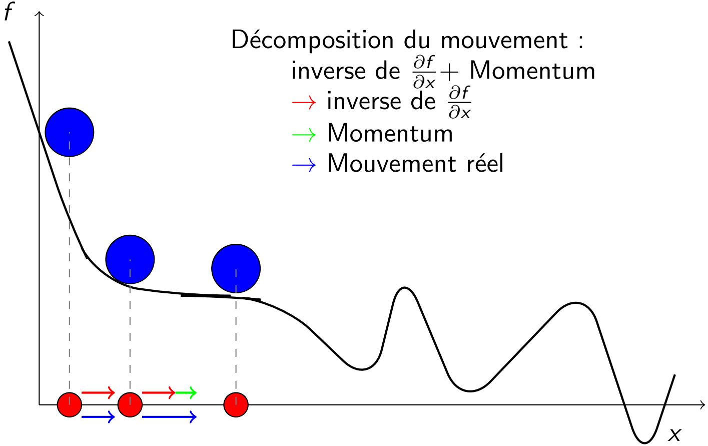
$\rightarrow$ inverse de $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\rightarrow$ Momentum

$\rightarrow$ Mouvement réel

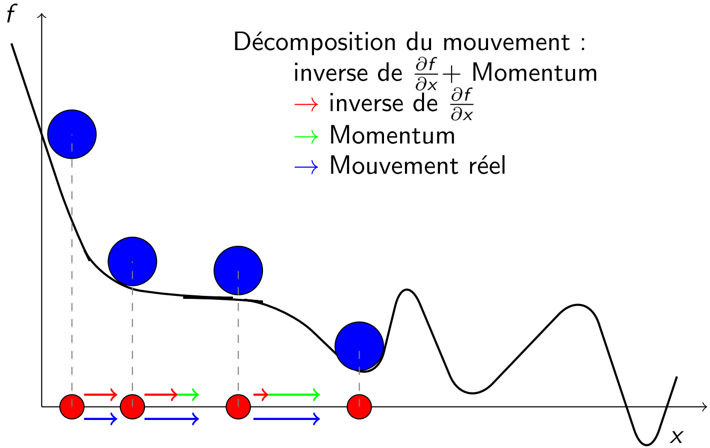
Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



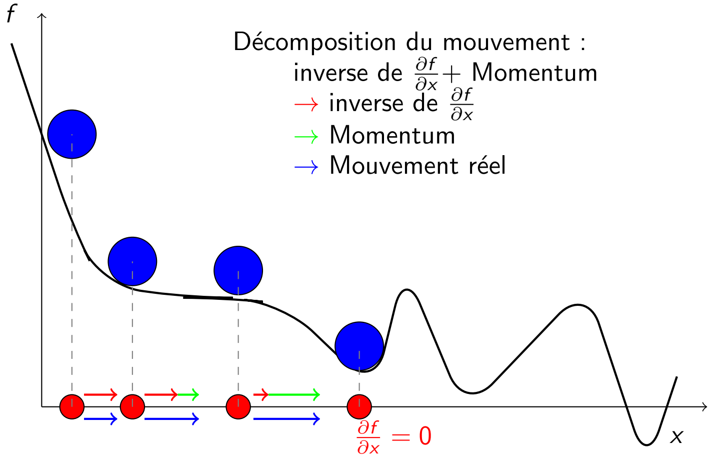
Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



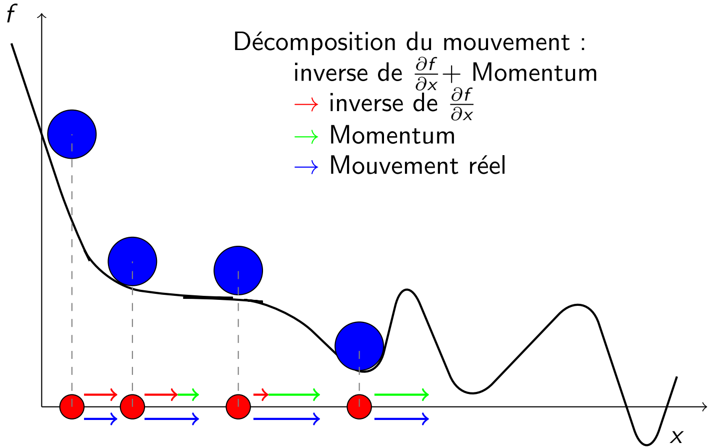
Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....



Descente du gradient

Problème : minimum mais local ....

Décomposition du mouvement :

La formule devient :

$\nu_t = \gamma \nu_{t-1} + \eta \frac{\partial f}{\partial x}$

$x \leftarrow x - \nu_t$