Analyse, Classification et Indexation des données (ACID)

Apprentissage supervisé : Théorie de décision Bayesienne

Akka Zemmari

LaBRI, Université de Bordeaux

2022 - 2023

Rappels et notations

Notations

- $\mathbb{P}r\left(A\right)$: probabilité de l'évènement A,
- $\mathbb{P}r_X\left(.\right)$: distribution de la v.a. discrète X,
- $f_X\left(.\right)$: densité de probabilité de la v.a. continue X,
- $f_{X,Y}\left(.\right)$: densité jointe de probabilité de X et Y,
- $\mathbb{P}r_{X|Y}\left(.\right)$: distribution conditionnelle de la v.a. discrète X, sachant Y,
- $f_{X|Y}\left(.\right)$: densité conditionnelle de X sachant Y.

Rappels et notations

Rappels

- Probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}r\left(A \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}r\left(A \cap B\right)}{\mathbb{P}r\left(B\right)},$$

- Loi des probabilités totales :

$$\mathbb{P}r\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}r\left(A \mid B_i\right) \mathbb{P}r\left(B_i\right)$$

- Théorème de Bayes :

$$\mathbb{P}r\left(B_i \mid A\right) = \frac{\mathbb{P}r\left(A \mid B_i\right) \mathbb{P}r\left(B_i\right)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}r\left(A \mid B_j\right) \mathbb{P}r\left(B_j\right)}$$

Des chiens et des chats

- Supposons que l'on a les probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}r\,(\text{petites oreilles} \mid \text{chien}) = 0.1, \;\; \mathbb{P}r\,(\text{grandes oreilles} \mid \text{chien}) = 0.9$$

$$\mathbb{P}r\,(\text{petites oreilles} \mid \text{chat}) = 0.8, \;\; \mathbb{P}r\,(\text{grandes oreilles} \mid \text{chat}) = 0.2$$

- On considère un animal avec de grandes oreilles. Peut-on dire que c'est un chat ou c'est un chien ?

Des chiens et des chats

- Supposons que l'on a les probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}r\,(\text{petites oreilles} \mid \text{chien}) = 0.1, \;\; \mathbb{P}r\,(\text{grandes oreilles} \mid \text{chien}) = 0.9$$

$$\mathbb{P}r\,(\text{petites oreilles} \mid \text{chat}) = 0.8, \;\; \mathbb{P}r\,(\text{grandes oreilles} \mid \text{chat}) = 0.2$$

- On considère un animal avec de grandes oreilles. Peut-on dire que c'est un chat ou c'est un chien ?
  Une réponse : chien car

$$\mathbb{P}r\,(\text{grandes oreilles} \mid \text{chien}) = 0.9 > 0.2 = \mathbb{P}r\,(\text{grandes oreilles} \mid \text{chat})$$

- $\Rightarrow$ Nous choisissons l'événement de plus grande probabilité, c'est-à-dire l'événement de vraisemblance maximale.

Fonction de vraisemblance

Un exemple : classification des poissons

- Supposons que :
  - la longueur l des saumons suit une distribution $\mathcal{N}(5; 1)$,
  - la longueur l des bars suit une distribution $\mathcal{N}(10; 4)$,
- Les densités conditionnelles des classes sont alors :

$$f\left(l \mid \text{saumon}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-5)^2}{2}} \text{ et } f\left(l \mid \text{bar}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-10)^2}{2*4}}$$

Fonction de vraisemblance

Un exemple : classification des poissons

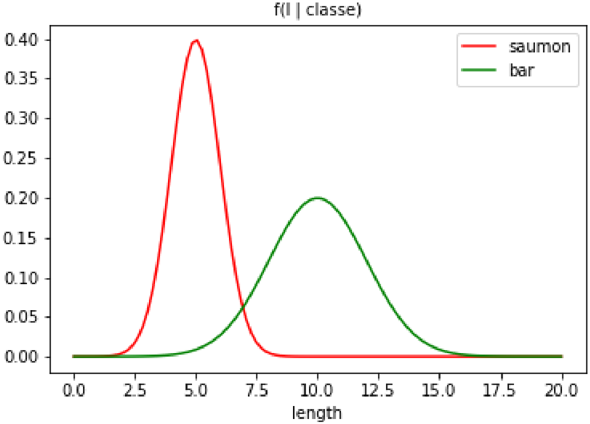
- Les densités conditionnelles des classes sont alors :

$$f(l \mid \text{saumon}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-5)^2}{2}} \text{ et } f(l \mid \text{bar}) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-10)^2}{2*4}}$$

- Si on fixe la longueur l et qu'on fait varier la classe, on obtient la fonction de vraisemblance :

$$f(l \mid \text{classe}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-5)^2}{2}} & \text{si classe} = \text{saumon} \\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-10)^2}{8}} & \text{si classe} = \text{bar} \end{cases}$$

Vraisemblance vs densité conditionnelle des classes



Question : On a un poisson de longueur 6, où le classer ?

Classifieur ML (Maximum likelihood)

- On voudrait choisir "saumon" si

$$\mathbb{P}r\,(l = 7 \mid \text{saumon}) > \mathbb{P}r\,(l = 7 \mid \text{bar})$$

- Or l est une v.a. continue, donc

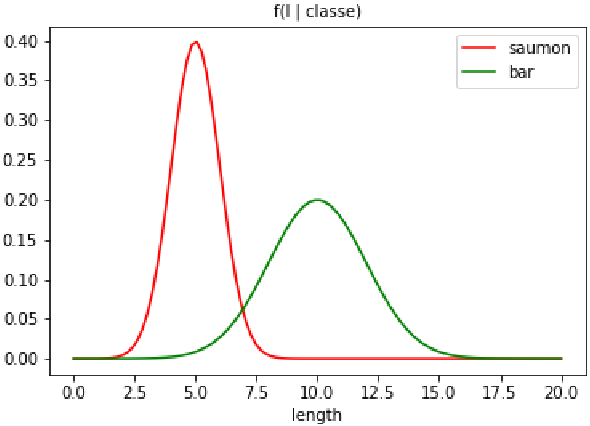
$$\mathbb{P}r\,(l = 7 \mid \text{saumon}) = \mathbb{P}r\,(l = 7 \mid \text{bar}) = 0$$

- Au lieu de ça, on choisit la classe qui maximise la vraisemblance :

$$f\,(l \mid \text{saumon}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-5)^2}{2}}\,;\ f\,(l \mid \text{bar}) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-10)^2}{2*4}}$$

- Classifieur ML : pour une observation l,
Si $f\,(l \mid \text{saumon}) > f\,(l \mid \text{bar})$ alors, on classe l'instance en "saumon", sinon, on la classe en "bar".

Frontière de décision



Classification apriori

- On ne dispose pas des données mais d'une connaissance apriori,
- On va exploiter une connaissance comme : " dans la mer, il y a deux fois plus de saumons que de bars"
- On en déduit une distribution apriori :

$$\mathbb{P}r\,(Saumon) = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbb{P}r\,(Bar) = \frac{1}{3}.$$

- Retour à la question de toute à l'heure : *Comment classer un poisson de longueur $l = 6$?*
  Intuitivement, on a envie de prendre en compte et le ML et les probabilités apriori ... Comment faire ?

Classifieur MAP (Maximum a posteriori)

Règle de décision de Bayes

1. on dispose de la fonction de vraisemblance :

$$f\left(l \mid \text{classe}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-5)^2}{2}} & \text{si classe} = \text{saumon} \\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-10)^2}{8}} & \text{si classe} = \text{bar} \end{cases}$$

2. on a les probabilités apriori :

$$\mathbb{P}r\left(Saumon\right) = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbb{P}r\left(Bar\right) = \frac{1}{3}.$$

3. Règle de décision :

$$classe = \begin{cases} \text{Saumon} & \text{si } \mathbb{P}r\left(Saumon \mid l\right) > \mathbb{P}r\left(Bar \mid l\right) \\ \text{Bar} & \text{sinon} \end{cases}$$

Classifieur MAP (Maximum a posteriori)

Probabilités a posteriori

- $\mathbb{P}r\,(Saumon \mid I)$ et $\mathbb{P}r\,(Bar \mid I)$ sont les distributions a posteriori (Pourquoi ?)
- Comment les calculer ?

Classifieur MAP (Maximum a posteriori)

Probabilités a posteriori

- $\mathbb{P}r\,(Saumon \mid I)$ et $\mathbb{P}r\,(Bar \mid I)$ sont les distributions a posteriori (Pourquoi ?)
- Comment les calculer ?
- Théorème de Bayes (voir le tableau)

Et pour une dimension supérieure ?

Quid de la classification avec plusieurs "features" ?

Un Exemple

S(ex)	H(eight) (m)	W(eight) (kg)	F(oot) size (cm)
M	1.82	82	30
M	1.80	86	28
M	1.70	77	30
M	1.80	75	25
F	1.52	45	15
F	1.65	68	20
F	1.68	59	18
F	1.75	68	23

Un Exemple

S(ex)	H(eight) (m)	W(eight) (kg)	F(oot) size (cm)
M	1.82	82	30
M	1.80	86	28
M	1.70	77	30
M	1.80	75	25
F	1.52	45	15
F	1.65	68	20
F	1.68	59	18
F	1.75	68	23

- Question : Est-ce que (1.81, 59, 21) est M ou F ?
- $\Rightarrow$ Voir le tableau.

$$\mathbb{P}r\left(Y \mid X_1, \cdots, X_n\right) = \frac{1}{Z} \times \mathbb{P}r\left(Y\right) \times \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}r\left(X_i \mid Y\right)$$

- X_i est continue $\rightarrow X_i \mid Y = y \sim \mathcal{N}\left(\mu_{iy}, \sigma_{iy}\right)$
- X_i est binaire, $\rightarrow X_i \mid Y = y \sim \mathcal{B}\left(p_{iy}\right)$

L'algorithme

- Entraînement :
  Pour toutes les valeurs possibles de Y et de X_i, calculer $\hat{\mathbb{P}}r\,(Y = y)$ et $\hat{\mathbb{P}}r\,(X_i = x_i \mid Y = y)$
- Prédiction : étant donné $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, retourner y qui maximise
  $\hat{\mathbb{P}}r\,(Y = y)\,\hat{\mathbb{P}}r\,(X_i = x_i \mid Y = y)$

Et en pratique

Voir le notebook