

Analyse, Classification et Indexation des données (ACID)

Rappels d'algèbre linéaire

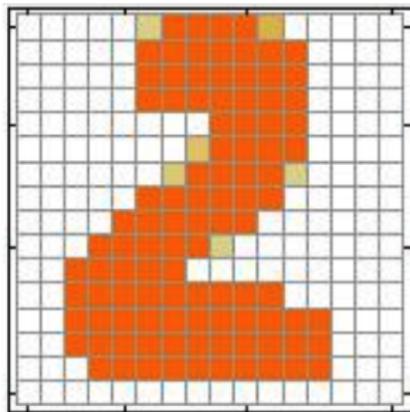
Akka Zemmari

LaBRI, Université de Bordeaux

2024 - 2025

Intuitions

Les vecteurs, les matrices, pourquoi faire ...



Intuitions

Les vecteurs, les matrices, pourquoi faire ...

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$$

Intuitions

Les vecteurs, les matrices, pourquoi faire ...

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{256}$$

Notions de base

Définitions

Vecteur

$$V = (v_i)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Notions de base

Définitions

Matrice :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Matrices particulières :

► Matrice identité :

$$I = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ avec } n = m, a_{i,i} = 1 \text{ et } a_{i,j} = 0, \forall i \neq j$$

► Matrice diagonale :

$$D = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ avec } n = m, a_{i,i} = d_i \text{ et } a_{i,j} = 0, \forall i \neq j$$

Calcul matriciel

Opérations de base

Addition

$$\begin{aligned}
 C = (c_{i,j}) \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} &= A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Calcul matriciel

Opérations de base

Multiplication

- ▶ Produit scalaire de deux vecteurs, $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

- ▶ D'une matrice par un vecteur, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$:

$$Ax = \left(\sum_{i=1}^n a_{j,i} x_i \right)_{1 \leq j \leq m} \in \mathbb{R}^m.$$

- ▶ De deux matrices, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$:

$$P = (p_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq l}} = A \times B \in \mathbb{R}^{m \times l}, \text{ avec } p_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

Autres opérations

- ▶ Transposée : $A = (a_{i,j}) \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \in \mathbb{R}^{m,n},$

$$A^T = (a_{j,i}) \begin{matrix} 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m \end{matrix} \in \mathbb{R}^{n,m}$$

Remarque : $(A \times B)^T = B^T \times A^T.$

- ▶ Inverse : l'inverse d'une matrice **carrée inversible** A est notée A^{-1} . Il s'agit de l'unique matrice telle que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I.$$

Autres opérations

- ▶ Trace : La trace d'une matrice carrée A est la somme de ses entrées en diagonale.

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Remarque : $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ et $\text{tr}(A \times B) = \text{tr}(B \times A)$.

- ▶ Déterminant : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{\{1,2,\dots,n\} \setminus \{i\}, \{1,2,\dots,n\} \setminus \{j\}})$$

Remarque : A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

Propriétés

Norme

Définition.

Une norme est une fonction

$$N : V \rightarrow [0, +\infty[,$$

où V est un espace vectoriel et tel que : $\forall x, y \in V$,

- $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$,
- $N(ax) = |a|N(x)$ pour tout scalaire a ,
- $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Propriétés

Norme

Exemples de normes

Pour $x \in \mathbb{R}^n$:

Norme	Notation	Définition
L^1 , Manhattan	$\ x\ _1$	$\sum_{i=1}^n x_i $
L^2 , Euclidean	$\ x\ _2$	$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
L^p , p -norme	$\ x\ _p$	$\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$
L^∞ , Infini	$\ x\ _\infty$	$\max_i x_i $

Propriétés

Rang

Dépendance linéaire

les vecteurs v_1, v_2, \dots, v_n sont dits **dépendants** s'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que :

- $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, et
- $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$.

Sinon, les vecteurs v_1, v_2, \dots, v_n sont dit **indépendants**.

Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice A , noté $\text{rang}(A)$ est la dimension de l'espace vectoriel généré par ses colonnes. Ceci est équivalent au nombre maximum de colonnes indépendantes de A .

Valeurs propres, vecteurs propres

Définition

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^*$, appelé vecteur propre, tel que :

$$Av = \lambda v.$$

Et en pratique ...

`numpy` et `numpy.linalg`

Voir la démo sur jupyter notebook