$$J = \sum_j \| z_j - \sum_i \alpha_{ji} e_i \|^2$$

$$= \sum_j \| z_j^2 \| - 2 z_j^t \left(\sum_i \alpha_{ji} e_i\right) + \left(\sum_i \alpha_{ji} e_i\right)^2 \|$$

$$= \underbrace{\sum_j \|z_j\|^2}_{} - 2 \sum_j \sum_i \alpha_{ji} z_j^t e_i + \sum_j \sum_i \alpha_{ji}^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_{ml}} = -2 z_m^t e_l + 2 \alpha_{ml}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \alpha_{ml}} = 0 \quad \text{ssi} \quad \boxed{z_m^t e_l = \alpha_{ml}}$$

$$J = \sum_j \|z_j\|^2 - 2 \sum_j \sum_i \underbrace{z_j^t e_i}_{} \underbrace{z_j^t e_i}_{} + \sum_j \sum_i (z_j^t e_i)^2$$

$$= \sum_j \|z_j\|^2 - \sum_j \sum_i (z_j^t e_i)^2.$$

<u>Or</u> : $(A^t B)^2 = (B^t A)(A^t B) = B^t (A A^t) B$

donc

$$J = \sum_j \|z_j\|^2 - \sum_j \sum_i e_i^t (z_j z_j^t) e_i$$

$$J = \sum_j \|z_j\|^2 - \sum_j \sum_i e_i^t (z_j z_j^t) e_i$$

$$= \sum_j \|z_j\|^2 - \sum_i e_i^t \underbrace{\left(\sum_j z_j z_j^t \right)}_{S} e_i$$

$$= \sum_j \|z_j\|^2 - \sum_i e_i^t S e_i$$

Minimiser J revient alors à maximiser $\sum_i e_i^t S e_i$ avec la contrainte $e_i^t e_i = 1$.

On utilise alors la methode des multiplicateurs de Lagrange:

Il faut donc ~~mi~~

maximiser $\mathcal{L} = \sum_i e_i^t S e_i - \sum_i \lambda_i (e_i^t e_i - 1)$

Rappel: $\frac{d x^t x}{dx} = 2x$; $\frac{d x^t A x}{dx} = 2Ax$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_m} = 2 S e_m - \lambda_m 2 e_m$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_m} = 0 \text{ ssi } \boxed{S e_m = \lambda_m e_m}$$

$\Rightarrow$ λ_m est une valeur propre de S
et e_m est le vecteur propre associé.

$$J = \sum_j \|z_j\|^2 - \sum_i e_i^t \lambda_i e_i$$

$$= \sum_j \|z_j\|^2 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{e_i^t e_i}$$

$$= \sum_j \|z_j\|^2 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$$

J sera d'autant plus petite que
les λ_i seront grands.

$\Rightarrow$ Il faut choisir les $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$
tq $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq \ldots \geq \lambda_d$.

Question: C'est quoi la matrice S ?

retour à sa définition:

$$S = \sum_j z_j^t z_j$$

or $z_j = x_j - \bar{x}$

$$\Rightarrow S = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^t (x_j - \bar{x})$$

$$= (n-1) \hat{\Sigma}$$

avec $\hat{\Sigma}$ la matrice de covariance

$$S = (n-1)\hat{\Sigma} = (n-1)\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^t(x_j - \bar{x})$$

$$= (n-1)\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2_{11} & \hat{\sigma}^2_{12} & \cdots & \hat{\sigma}^2_{1n} \\ \hat{\sigma}^2_{21} & \hat{\sigma}^2_{22} & \cdots & \hat{\sigma}^2_{2n} \\ \vdots & & & \\ \hat{\sigma}^2_{n1} & \hat{\sigma}^2_{n2} & \cdots & \hat{\sigma}^2_{nn} \end{pmatrix}$$

λ est valeur propre de S ssi elle est solution de $\det(S - \lambda I) = 0$

$$(n-1)S - \lambda I = \begin{pmatrix} (n-1)\hat{\sigma}^2_{11} - \lambda & (n-1)\hat{\sigma}^2_{12} & \cdots \\ (n-1)\hat{\sigma}^2_{21} & (n-1)\hat{\sigma}^2_{22} - \lambda & \\ \vdots & & \ddots \\ (n-1)\hat{\sigma}^2_{n1} & \cdots (n-1)\hat{\sigma}^2_{nn-1} & (n-1)\hat{\sigma}^2_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$